VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

Komentovaný metodický list č. 1/4
Vytvořil: Ing. Oldřich Ševeček & Ing. Tomáš Profant, Ph.D. v rámci grantového projektu FRVŠ 2421/2007/G1

Téma:

Výpočet charakteristického vlastního čísla singularity (exponentu singularity napětí) pro obecný koncentrátor napětí.

Zadání:

Pro zvolenou materiálovou konfiguraci a obecný koncentrátor napětí (trhlina končící na rozhraní dvou materiálů) vypočtěte charakteristické vlastní číslo singularity δ a určete funkci rozložení posuvů a napětí v okolí kořene tohoto koncentrátoru.

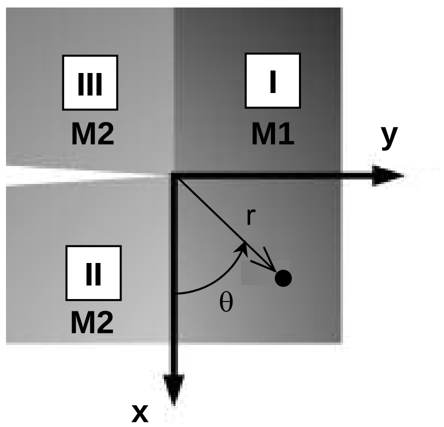
Řešení:

V okolí vrcholu trhliny se pro posuvy, napětí a výslednou sílu podél polopřímky vedoucí z počátku souřadného systému může psát

$$\underline{\sigma} = H \cdot r^{\delta-1} \cdot \underline{F}(\theta), \quad \mathbf{u} = H \cdot r^{\delta} \cdot \mathbf{g}(\theta), \quad -\mathbf{T} = H \cdot r^{\delta} \cdot \mathbf{f}(\theta) \tag{1}$$

Cílem je nalézt exponent δ a funkce $\underline{F}(\theta)$, $\mathbf{g}(\theta)$, $\mathbf{f}(\theta)$. Tyto funkce se sestaví z následujících vztahů (detailnější popis – viz závěrečná zpráva):

$$\underline{F} = \underline{L} \cdot \underline{e}^{\delta-1} \cdot \underline{\Phi} + \overline{\underline{L}} \cdot \overline{\underline{e}}^{\delta-1} \cdot \overline{\underline{\Phi}}, \quad \mathbf{g} = \underline{A} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \overline{\underline{A}} \cdot \overline{\underline{e}}^{\delta} \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \mathbf{f} = \underline{L} \cdot \underline{e}^{\delta} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \overline{\underline{L}} \cdot \overline{\underline{e}}^{\delta} \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2}$$



Obr. 1. Schéma polonekonečné trhliny kolmé k rozhraní dvou materiálů

Okrajové podmínky řešení problému jsou dvojí: vzájemné spojení obou materiálů se předpokládá jako ideální, tj. pro $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ musí platit

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}^{I} &= -\mathbf{T}^{II}, \quad \mathbf{u}^{I} = \mathbf{u}^{II} \\ -\mathbf{T}^{II} &= -\mathbf{T}^{III}, \quad \mathbf{u}^{II} = \mathbf{u}^{III} \end{aligned} \tag{3}$$

a dále líce trhlin musí být bez napětí, tj. pro $\theta = -\pi/2$ a $\theta = 3\pi/2$ musí platit

$$-\mathbf{T}^{I} = 0, \quad -\mathbf{T}^{III} = 0 \tag{4}$$

Indexy *I, II* a *III* značí oblast bi-materiálu, které se daná okrajová podmínka týká, viz. Obr. 1. Pomocí druhého a třetího vztahu v (1) a okrajových podmínek (3) a (4) se sestaví soustava dvanácti homogenních lineárních rovnic:

$$\underline{K}(\delta)\,\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

kde $\underline{K}(\delta)$ je matice dané soustavy, jejíž prvky závisí na exponentu δ a $\mathbf{v}$ je jemu odpovídající vlastní vektor.

Aby soustava (5) měla netriviální řešení, musí být rovnice soustavy vzájemně lineárně závislé, tj. determinant matice soustavy $\underline{K}$ musí být nulový

$$\det\left(\underline{K}(\delta)\right) = 0 \tag{6}$$

Rovnice (6) je nelineární, a její nejmenší kladný kořen δ je hledaný exponent singularity. S exponentem singularity δ je úzce spojen problém hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\underline{K}$. Dosazením exponentu δ zpět do matice $\underline{K}$ se jako řešení soustavy (5) dostane vlastní vektor matice $\underline{K}$, který odpovídá jejímu vlastnímu číslu $\delta = 0$. Exponent δ je doprovázen svým duálním protějškem $\delta^* = -\delta$ a jemu odpovídajícím vlastním vektorem $\mathbf{v}^*$, který je řešením sdružené homogenní soustavy rovnic

$$\underline{K}(\delta^*)\,\mathbf{v}^* = 0 \tag{7}$$

Znalost duálního (pomocného) řešení je důležitá k vyjádření zobecněného součinitele intenzity napětí pomocí tzv. ψ-integrálu – viz metodický list č.2/4.

Demonstrativní výpočet:

Model je zhotoven ze dvou materiálových vrstev M1 a M2, kde elastické vlastnosti obou materiálů jsou identické: E_L = 137 GPa, $E_T = E_Z$ = 10,8 GPa G_{ZT} = 3,36 GPa ν_{TZ} = 0,49 G_{ZL} = G_{TL} = 5,65 GPa $\nu_{ZL} = \nu_{TL}$ = 0,238 – pouze hlavní materiálové směry jsou vzájemně u těchto materiálů pootočeny o 90°. Prakticky to znamená, že materiál M1 má Youngův modul E_L ve směru osy y a materiál M2 má E_L ve směru osy x (viz Obr.1). Je samozřejmě možné si nadefinovat jakýkoliv vlastní ortotropní materiál – viz následující postup.

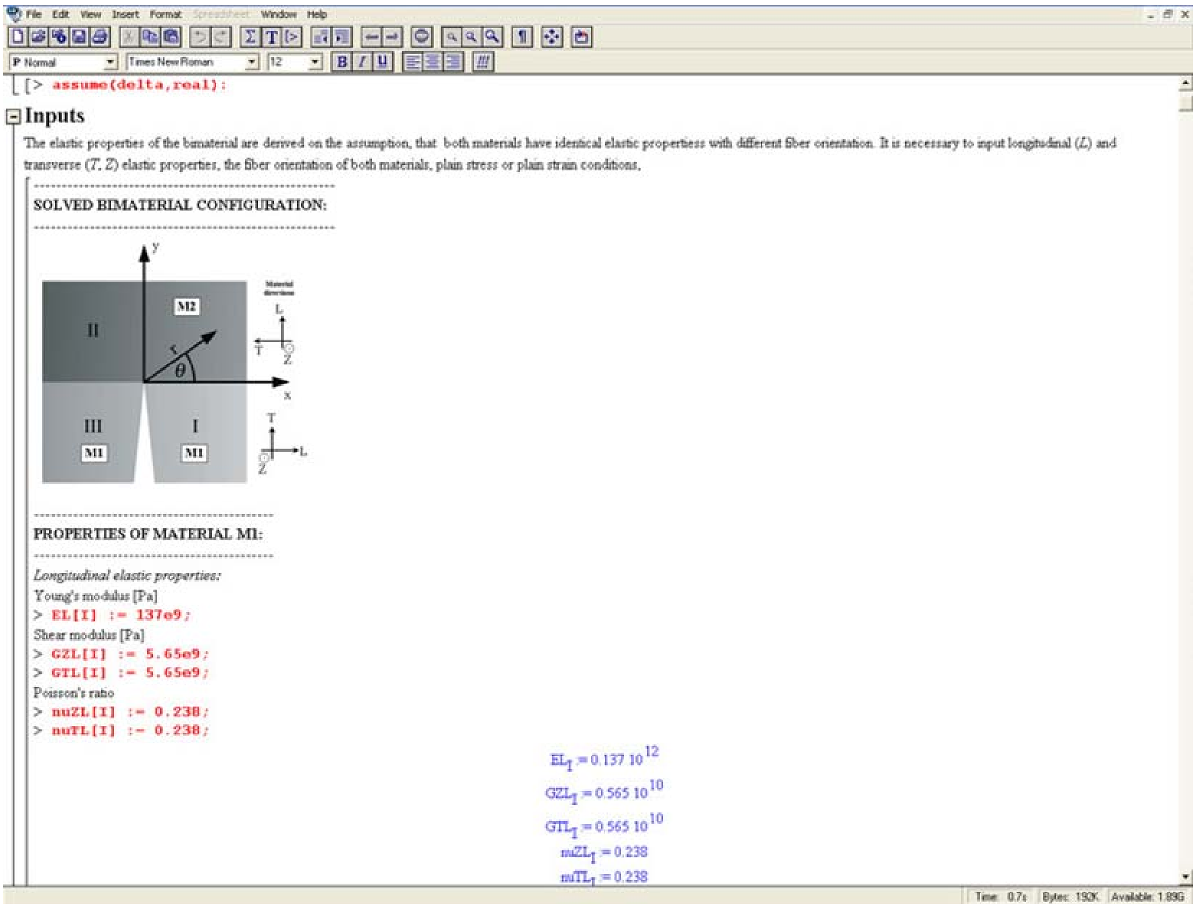
Kroky samotného výpočtu užitím zdrojového souboru jsou následující:

1. V souboru „*Singularity analysis_orthotropic problem.mws*“ (zdrojový soubor pro MAPLE – nachází se v adresáři „*1_Singularita*“) v části *Inputs* jsou zadány výše uvedené vstupní materiálové charakteristiky obou materiálů, natočení materiálových směrů E_L vzhledem ke kladné ose x (Obr.1) a typ rovinné úlohy (rovinná napjatost/rovinná deformace), viz. obr. 2.
2. Následuje výpočet vlastních čísel obou materiálů a proces sestavení matice $\underline{K}(\delta)$.
3. Je vygenerována nelineární rovnice (6) ve tvaru

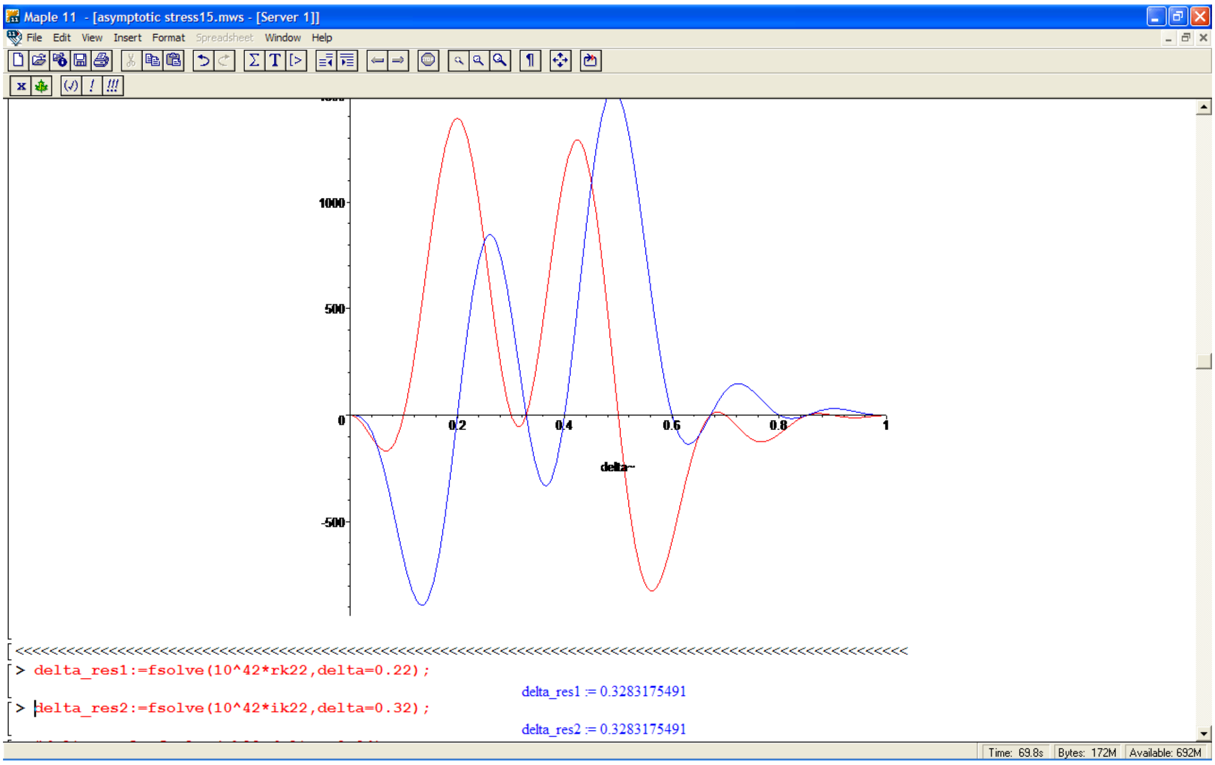
   $$\det(\underline{K}(\delta)) = \mathrm{Re}\{\det(\underline{K}(\delta))\} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\{\det(\underline{K}(\delta))\} = 0 \tag{8}$$

   jejíž reálná a imaginarní část jsou vykresleny v závislosti na δ, viz obr. 3.
4. Reálná část rovnice (8) je vykreslena červeně, imaginární část modře. Řešením rovnice (8) jsou společné body obou křivek na ose δ. Pro výše uvedenou konfiguraci bi-materiálu, exponent singularity nabývá hodnoty δ = 0,3283175491, viz obr. 3. Ostatní řešení exponentu singularity δ odpovídají zbývajícím členům Williamsova rozvoje, které mají taktéž singulární charakter, ale odpovídají jinému charakteru zatěžování než módu I.

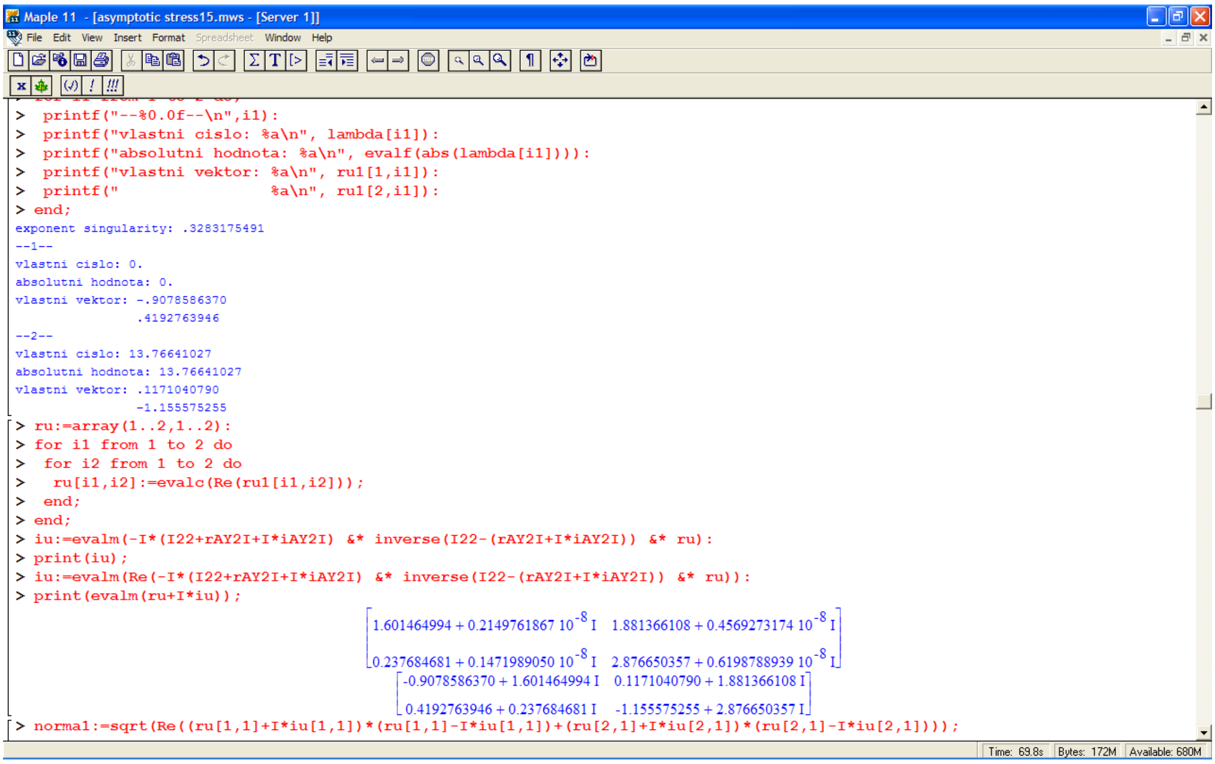
5. V další části je exponent δ dosazen zpět do matice $\underline{K}(\delta)$ a následuje procedura nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\underline{K}(\delta)$. Procedura vygeneruje dvě vlastní čísla a jim odpovídající reálné a imaginární hodnoty vlastních vektorů, viz. obr. 4. Alespoň jedno vlastní číslo je nulové. Nenulové vlastní číslo a jemu odpovídající vlastní vektor jsou matematickým řešením problému, avšak z fyzikálního hlediska nemají význam.
6. Vypočtený vlastní vektor odpovídá oblasti I pod trhlinou a pro zkoumanou konfiguraci jeho souřadnice nabývají hodnot **u** = [0.9078586370 + i 1.601464994, 0.4192763946 + i 0.237684681]^T.
7. Následuje procedura, která dopočítá vlastní vektory zbývajících částí bi-materiálu, tj. částí II a III, viz. Obr. 5. Pro zkoumanou konfiguraci bi-materiálu to jsou vektory **v** = [-0.4770818838 + i 0.2704541839, 0.2203307475 + i 0.3886640117]^T a **w** = [-0.9671249395 - i 0.0228653789, -0.0059858589 + i 0.2532010747]^T
8. Na závěr jsou dopočteny vlastní vektory pomocného řešení odpovídající exponentu singularity $\delta^* = -\delta$, viz. obr. 6 a 7.
9. Všechny potřebné veličiny jsou zapsány do výstupního souboru „*vl_vektory_z_maplu.m*“ (viz obr. 8.), který je zároveň vstupním souborem do systému MATLAB, kde potom na základě těchto veličin můžeme vypočítat v libovolném místě v okolí kořene trhliny hodnotu posuvu či napětí. To se bude následně hodit například pro výpočet zobecněného součinitele intensity napětí.



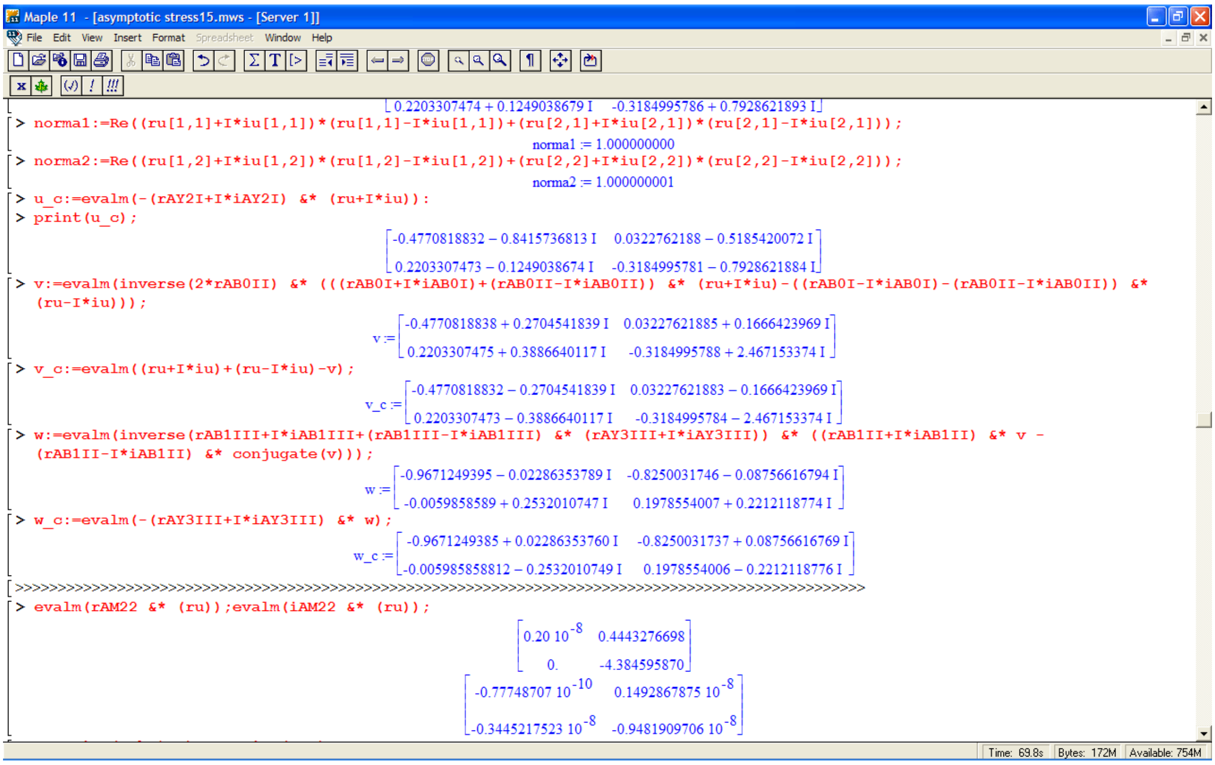
Obr. 2. Zadávání elastických konstant materiálů



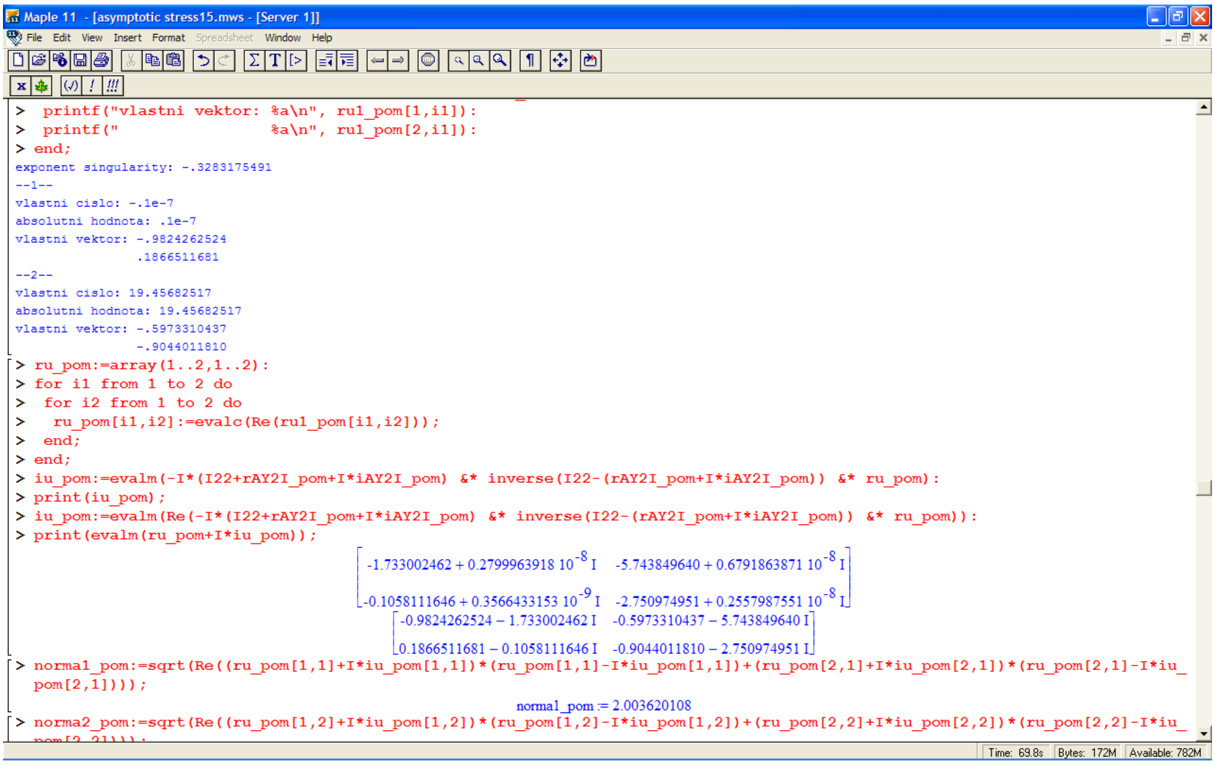
Obr. 3. Reálná a imaginární část funkce pro vlastní čísla.



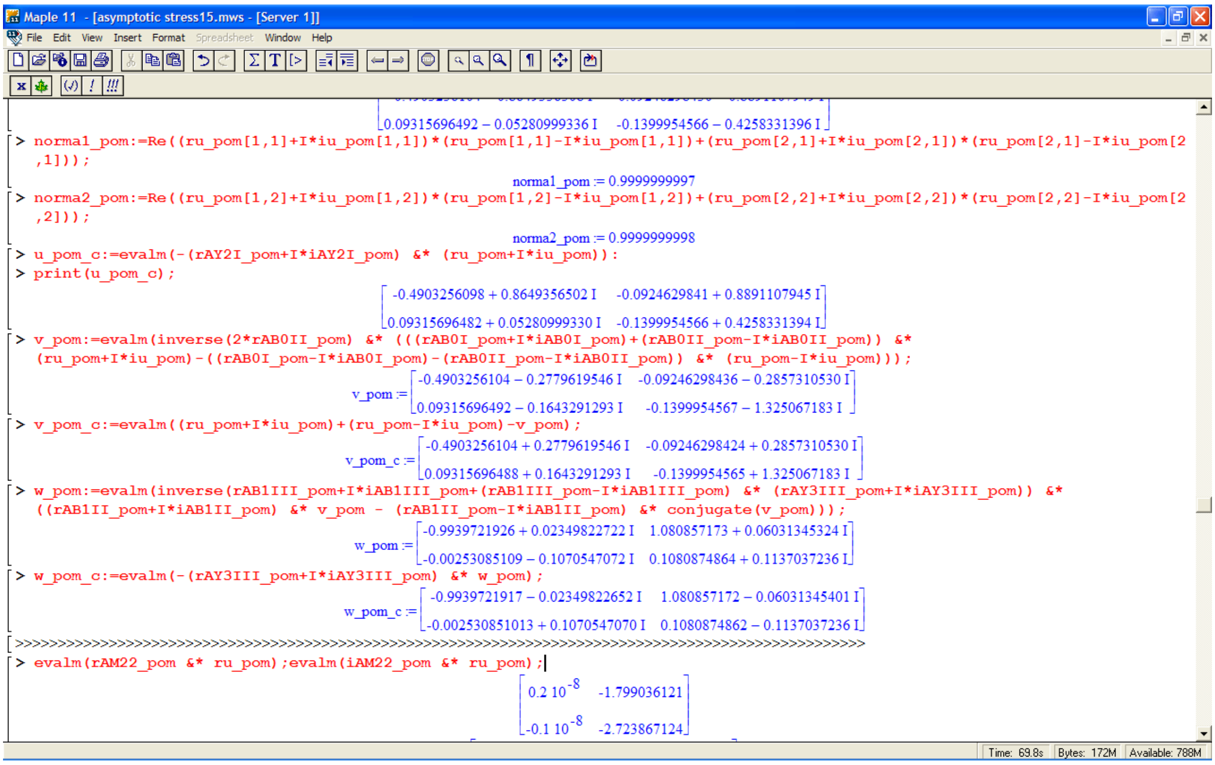
Obr. 4. Výpis vlastních vektorů pro vypočtené vlastní číslo.



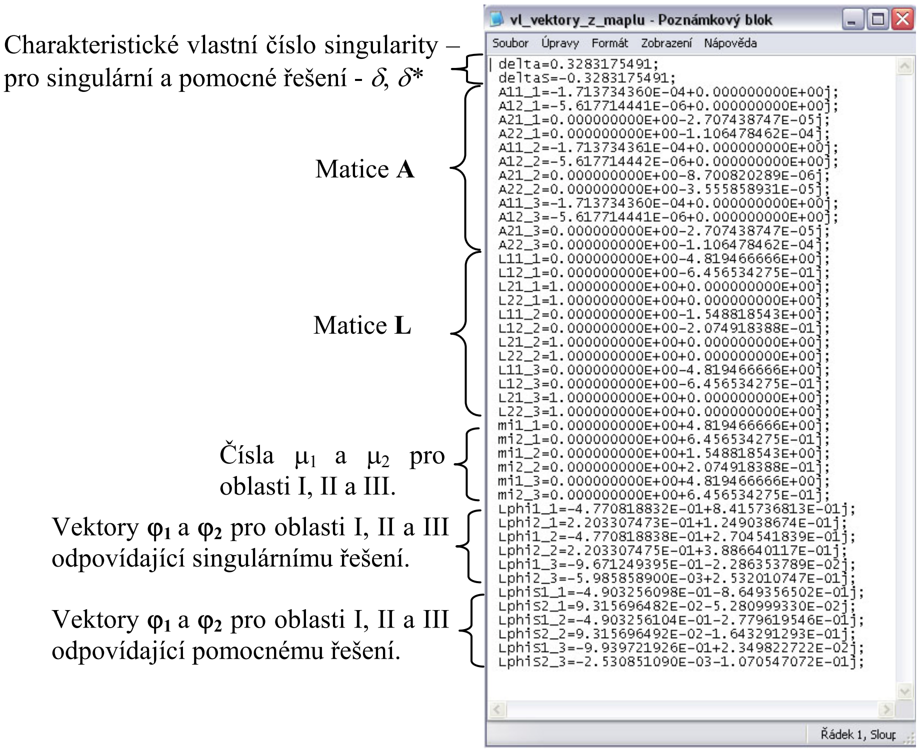
Obr. 5. Výpis vlastních vektorů pro vypočtené vlastní číslo v materiálové oblsti II a III (vektory v, w)



Obr. 6. Výpočet vlastního vektoru odpovídající vlastnímu číslu pomocného řešení v materiálové oblasti I.



Obr. 7. Výpis vlastních vektorů pro pomocné řešení materiálové oblasti II a III (vektory v_pom, w_pom).



Obr. 8. Výstupní soubor ze zdrojového kódu MAPLU obsahující vlastní vektory a vlastní čísla singulárního a pomocného řešení (jedná se zároveň o zdrojový soubor do MATLABu) – j – imaginární jednotka.

Pozn.: Význam všech výstupních parametrů viz závěrečná zpráva – analýza singularity.

Úkoly pro studenty:

- Proveďte výpočet charakteristického vlastního čísla singularity δ pro různé moduly pružnosti E_L a výsledek okomentujte.
- Proveďte výpočet charakteristického vlastního čísla singularity δ pro směry E_L pootočené u o obou materiálů o 90 stupňů oproti výchozímu stavu a výsledek okomentujte. Jaký typ singularity dostanete?